Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática - IM
Programa de Olimpíadas de Matemática

# V OLIMPÍADA ALAGOANA DE MATEMÁTICA

Competição Prof. Edmilson Pontes
Fase final 2007 - Nível 3

## Parte A - Cada questão vale 5 pontos

**01.** Ache a soma de todos os valores de $n$ (inteiro positivo), tais que $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ é um quadrado perfeito.

**02.** Duas cidades $A$ e $B$ distam a $86km$. Um carro $C_1$ sai de $A$ para $B$ com velocidade $v$ e outro carro $C_2$ sai de $B$ para $A$ com velocidade $3v$. Quando $C_2$ encontra $C_1$ ele retorna para $B$ e ao chegar sai novamente para $A$. Este processo se repete até que os dois carros coincidem em $B$. Qual é a distância total percorrida por $C_2$?

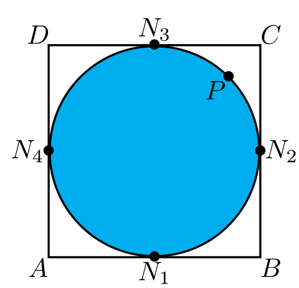
**03.** Calcule a quantidade de polígonos regulares que existem cujos ângulos internos medem um número inteiro de graus.

**04.** Ao dividir um certo polinômio $p(x)$ por $(x+2)$, $(x-2)$ e $(x+3)$ são obtidos os restos $4$, $8$ e $13$, respectivamente. Se $r(x)$ é o resto da divisão de $p(x)$ por $(x+2)(x-2)(x+3)$, então ache o valor de $r(2)$.

## Parte B - Cada questão vale 10 pontos

**01.** Na figura abaixo o círculo $S$ de raio $a$ está inscrito no quadrado $ABCD$. Sejam $N_1$, $N_2$ , $N_3$ e $N_4$ os pontos de tangência do círculo com o quadrado. Se $P$ é um ponto qualquer sobre o círculo $S$, diferente dos pontos de tangência, então ache o valor de

$$\overline{PA}^2 - \overline{PN_1}^2 + \overline{PB}^2 - \overline{PN_2}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PN_3}^2 + \overline{PD}^2 - \overline{PN_4}^2.$$




**02.** Sejam $a$, $b$, $c$, $x$, $y$ e $z$ números reais tais que $a^4 + b^4 + c^4 = 1 = x^4 + y^4 + z^4$. Prove que

$$ax + by + cz \leq \sqrt{3}.$$

**03.** Numa olimpíada de matemática nenhum aluno resolveu todos os problemas; porém cada problema foi resolvido por algum aluno. Prove que algum aluno $A_1$ resolveu um problema $P_1$ e outro aluno $A_2$ resolveu um outro problema $P_2$ de modo que $A_1$ não tenha resolvido $P_2$ e $A_2$ não tenha resolvido $P_1$.